**Частково рекурсивні функції**

**8.1. Теорема про графік ЧРФ**

**Теорема 8.1** (про графік частково рекурсивної функції). Для того, щоб часткова функція *f* була частково рекурсивною, необхідно і достатньо, щоб графік *f* був рекурсивно перелічимим.

Достатність (графік *Gf* функції *f* є РПМ ⇒ *f* є ЧРФ). За попередньою теоремою множина *Gf* співпадає з множиною пар виду < *f*1(*x*), *f*2 (*x*) >, *x* = 0,1, ….

Тоді для обчислення функції *f* існує алгоритм

function *f* (*x*)

begin

*i* := 0

while *f*1(*i*) ≠ *x*

do *i* := *i* + 1

*f* := *f*2 (*i*)

end.

Цей алгоритм або обчислює значення *f* (*x*), або працює нескінченно довго у випадку, якщо *f* (*x*) невизначена.

Необхідність (*f* є ЧРФ ⇒ графік *Gf* функції *f* є РПМ). Часткова характеристична функція множини *Gf* може бути обчислена алгоритмом:

function (*x*, *y*)

begin

*i* := 0

while *i* ≠ *x*

do *i* := *i* + 1

while *f*(*x*) ≠ *y*

do *i* := *i* + 1

:= 0

end.

**Наслідок 8.1.** Область визначення кожної ЧРФ є РПМ.

Доведення. Графік ЧРФ можна подати у вигляді

<*u*1 (*t*), … , *un*+1 (*t*)>.

Тоді алгоритм обчислення часткової характеристичної функції області визначення є таким:

function χ(*x*1, … , *xn*)

begin

*i* := 0

while *x*1 ≠ *u*1(*i*) ∨ … ∨ *xn* ≠ *un* (*i*)

do *i* := *i* + 1

χ := 0

end.

**Наслідок 8.2.** Область значень ЧРФ є РПМ.

Доведення. Графік ЧРФ можна подати у вигляді:

<*u*1(*t*), … , *un*+1(*t*)>.

Тоді алгоритм обчислення часткової характеристичної функції множини значень є таким:

function χ(*x*)

begin

*i* := 0

while *x* ≠ *un*+1(*i*)

do *i* := *i* + 1

χ := 0

end.

**Наслідок 8.3.** Множина *А* *n*-ок чисел РП ⇔ коли часткова характеристична функція множини *А* є ЧРФ.

Доведення (⇒). Якщо *А* – РПМ, то *А* = <*u*1 (*t*), … , *un* (*t*)>, *t* = 0, 1, 2, … Тоді алгоритм обчислення часткової характеристичної функції χ*А* є таким:

function χ*А* (*x*1, ... , *xn*)

begin

*i* := 0

while *x*1 ≠ *u*1(*i*) ∨ … ∨ *xn* ≠ *un*(*i*)

do *i* := *i* + 1

χ*A* := 0

end.

(⇐). Якщо χ*А* є ЧРФ (χ*А* – часткова характеристична функція множини *А*), то *А* співпадає з областю визначення χ*A*, а отже, є РПМ (наслідок 1).

**Наслідок 8.4.** Якщо *F*(*x*,*y*) – ЧРФ, то сукупність *А* тих *x*, для яких рівняння *F*(*x*, *y*) = 0 має розв’язок *у* є РПМ.

Доведення. Графік функції *F*(*x*, *y*) можна подати у вигляді

<*α*1(*t*), *α*2(*t*), *α*(*t*)>, *t* = 0, 1, 2, …

Тоді часткова характеристична функція множини *А* обчислюється алгоритмом:

function χ*А*(*x*)

begin

*i* := 0

while *α*(*i*) ≠ 0 ∨ *α*1(*i*) ≠ *x*

do *i* := *i* + 1

χ*A* := 0

end.

**Наслідок 8.5.** Сукупність *А* розв’язків рівняння

*f*(*x*1, ... , *xn*) = 0,

де *f* – ЧРФ, є РПМ.

Доведення. Графік функції *f* можна подати у вигляді

<*α*1(*t*), … , *αn*(*t*), *α*(*t*)>, *t* = 0, 1, 2, …

Тоді часткова характеристична функція множини *А* обчислюється алгоритмом

function χ*А*(*x*1, ... , *xn*)

begin

*i* := 0

while *α*1(*i*) ≠ *x*1 ∨ …∨ *αn*(*i*) ≠ *xn*∨ *α*(*i*) ≠ 0

do *i* := *i* + 1

χ*A* := 0

еnd.

**8.2. Кускове задання ЧРФ**

**Теорема 8.2.** Якщо функції *fi*(*x*) i *gi*(*x*) (*i* = 1, 2, ... , *n*) ЧРФ, то функція



є ЧРФ.

Доведення. Алгоритм обчислення функції *h* має вигляд:

function *h*(*x*)

begin

*i* := 0



if 

*j* := 0

while 

do *j* := *j* + 1

*h* := 

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

if 

*j* := 0

while 

do *j* := *j* + 1

*h* := 

end,

де  – графік *fi*(*x*),  – графік *gi*(*x*).